

Une version partisane du Harary's animal game

Encadrants : Nicolas Nisse*(DR inria) et Nacim Oijid†(MCF UniCA)

contact : `nacim.oijid@inria.fr`

Printemps-été 2027

1 Contexte

Dans le monde des jeux combinatoire, les jeux positionnels occupent une place particulièrement importante [1, 5], en raison de leur structure et de leurs liens avec différents autres domaines d'études : la théorie des graphes, la complexité et la logique par exemple. Ces jeux sont joués par deux joueurs, Alice et Bob, sur un hypergraphe. Alice et Bob sélectionnent à tour de rôle un sommet qui n'a pas encore été sélectionné de l'hypergraphe. Les conditions de victoires dépendent alors des hyperarêtes et de la convention de jeu considérée.

Dans la convention la plus étudiée, Maker-Breaker, Alice gagne si elle parvient à sélectionner tous les sommets d'une hyperarête, et Bob l'emporte s'il l'en empêche. En convention Maker-Maker, le jeu est davantage symétrique et chaque joueur l'emporte s'il parvient à sélectionner tous les sommets d'une hyperarête. Dans cette dernière convention, il est connu qu'il est toujours avantageux de jouer en premier, et que donc l'issue du jeu si les deux joueurs jouent optimalement est soit une victoire d'Alice, soit une égalité.

Un jeu positionnel connu est le morpion, où l'hypergraphe contient 9 sommets arrangés dans une grille 3 par 3 et chaque triplet de sommets alignés correspond à une hyperarête. Une généralisation du morpion est le Harary's animal game [4], joué dans $\mathbb{Z}^2$, et où les ensembles gagnants sont certains polyominos fixés à l'avance. Toutefois, une fois qu'un coup a été joué, l'ensemble des coups intéressants pour les deux joueurs peuvent ne plus être les mêmes. Il est donc naturel de se demander ce qui se passe si dès le début du jeu, Alice et Bob ont des ensembles gagnants différents [3].

2 Présentation du sujet

Ce sujet de stage se concentre sur une variante partisane du Harary's animal game dans lequel Alice et Bob commencent par choisir le polyomino qu'ils souhaitent construire dans un ensemble donné S de polyominos. Si l'ensemble considéré est un singleton, ce jeu revient donc à un jeu Maker-Maker joué dans la grille infini $\mathbb{Z}^2$. Cependant, si les polyominos d'Alice et de Bob sont différents, de nouveaux résultats peuvent apparaître. Par exemple, si Alice souhaite construire un P_3 (3 sommets alignés) et Bob un P_2 , Bob va l'emporter, même si Alice commence.

*<https://www-sop.inria.fr/members/Nicolas.Nisse/>

†<https://nacim-oijid.fr/>

Dans ce contexte, ce jeu ne rentre pas dans le cadre des jeux positionnels. Un des objectifs de ce stage est donc de découvrir un cadre pour étudier ces jeux. Ainsi, nous proposons les directions suivantes :

1. Si $k \geq 3$ est un entier et S est l'ensemble des polyominoes à k sommets, est-il possible d'avoir une victoire de Bob ?
2. Quelle est la complexité du problème qui prend en entrée un ensemble S de polyominoes et qui détermine l'issue du jeu joué avec les polyominoes de S ?
3. On note $P_2 \rightarrow_g P_1$ si Bob gagne en jouant le polyomino P_2 alors qu'Alice joue le polyomino P_1 , avec Alice qui commence. Quelles sont les propriétés de $\rightarrow_g$? Est-ce un ordre ? Si non, peut-on trouver une sous-famille (infinie ?) de polyominoes ordonnés ?
4. Si l'on relâche la condition sur le plateau de jeu Z^2 , on peut définir le même jeu joué dans un graphe G et où S est un ensemble de sous graphes de G . On peut alors redéfinir le jeu où Alice et Bob jouent en sélectionnant les arêtes du graphe G . Dans ce cas, si S est un singleton, on obtient le H game [2], un des jeux centraux dans l'étude des jeux positionnels. Une autre direction possible est d'étudier la version partisane du H -Game.

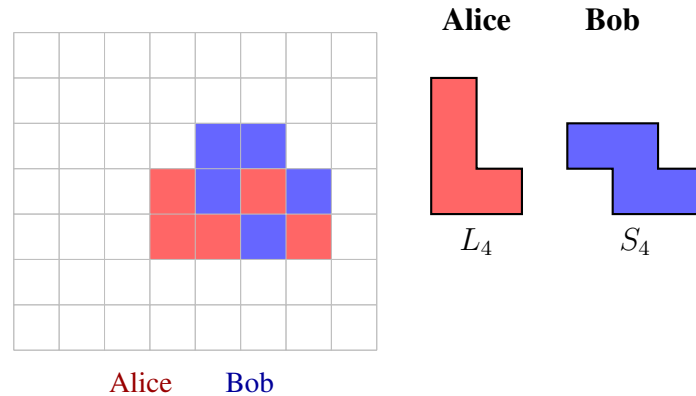


Figure 1: Exemple de position du jeu. Alice et Bob peuvent tous les deux gagner au prochain coup.

3 Environnement

Le stage se déroulera à l'Inria d'Université côte d'Azur, dans l'équipe COATI¹ (Combinatoire, Optimisation et Algorithmes pour les Télécommunications), équipe-projet commune entre le centre Inria de l'Université Côte d'Azur et le laboratoire I3S, qui relève lui-même du CNRS et de l'Université Côte d'Azur (UniCA).

Le stage pourra se concentrer sur une ou plusieurs des directions proposées ci-dessus. Nous sommes également ouverts à des suggestions de l'étudiant concernant de nouvelles directions potentielles. Si le stage a besoin d'être financé, merci de nous contacter au plus vite pour que nous puissions faire une demande de financement.

¹<https://team.inria.fr/coati/>

References

- [1] József Beck. *Combinatorial games: tic-tac-toe theory*, volume 114. Cambridge University Press Cambridge, 2008.
- [2] Eric Duchêne, Valentin Gledel, Fionn Mc Inerney, Nicolas Nisse, Nacim Oijid, Aline Parreau, and Miloš Stojaković. Complexity of maker–breaker games on edge sets of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 361:502–522, 2025.
- [3] Florian Galliot and Jonas Sénizergues. A unified convention for achievement positional games, 2026.
- [4] Frank Harary. Achievement and avoidance games for graphs. In Béla Bollobás, editor, *Graph Theory*, volume 62 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 111–119. North-Holland, 1982.
- [5] Dan Hefetz, Michael Krivelevich, Miloš Stojaković, and Tibor Szabó. *Positional games*, volume 44. Springer, 2014.