Le but de ce TP est de parvenir à résoudre des équations différentielles linéaires. Vous rendrez ce TT sous forme d'un unique fichier "[nom]_[prenom].c" par mail à *nacim.oijid@univ-lyon1.fr* le 22 janvier 2023 au plus tard.

La clarté du code et les commentaires feront partie de la notation. Il est recommandé de tester son code.

1 Ordre 1

Dans cette partie, nous chercherons à résoudre de manière approchée sur l'intervalle $[0,1]$ des équations de la forme $f'(x) - u(x)f(x) - v(x) = 0$, d'inconnue f où u et v et $f(0)$ sont connus. Pour ce faire, étant donné un pas ε, on écrira $f'(x) = u(x)f(x) + v(x)$ et on approximera $f(x+\varepsilon)$ par $f(x) + \varepsilon f'(x)$.

Question 0

On commencera par un *#define N 10000* et un double $X[N]$ qui représentera une subdivision de l'intervalle $[0,1]$. On aura donc $X[i] = i/(N-1)$. On définira aussi une variable globale *double Y[N]* qui stockera les valeurs de f.

Créez ces variables et calculez les valeurs de X dans le main

Question 1

Écrire une fonction solveur de type void qui prend en entrée deux fonctions u et v et qui calcul dans Y les valeurs de f. Après un appel à la fonction solveur, $Y[i]$ doit valoir $f(i/(N-1))$. On supposera que $Y[0]$ contient déjà $f(0)$ et on rentrera $Y[0]$ dans le main.

2 Ordre n

On cherchera ici à résoudre une équation de la forme $f^{(n)}(x) - v(x) - \sum_{i=0}^{n-1} f^{(i)}(x)u_i(x) = 0$ où les u_i et v sont des fonctions données et $f(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)$ sont des constantes données. Ce problème se réécrit sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-2)} \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ u_0 & u_1 & \ldots & u_{n-2} & u_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-2)} \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v(x) \end{pmatrix}$$

On s'est donc ramené à une équation différentielle linéaire d'ordre 1, mais avec des matrices.

On prendra ici $n = 4$, $u_i(x) = x^i$ et $v(x) = 0$.

Question 2

Écrire une fonction *ui* de type double qui prend en entrée un double x et un entier i et qui renvoie $u_i(x)$.

Question 3

Construire une matrice F de taille $n+1, N$. On stockera dans la question suivante la valeur de $f^{(i)}(k/(N-1))$ dans $F[i][k]$.

On prendra ici $f(0) = 1$ et $f^{(k)}(0) = 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$.

Question 4 Écrire une fonction *resout* de type void qui prend en entrée la fonction *ui*, une fonction v et une matrice F et qui rempli F avec les valeurs indiquées en question 3. On approximera encore $f^{(k)}(x+\varepsilon)$ par $f^{(k)}(x) + \varepsilon f^{(k+1)}(x)$.